

## LEKCJA 4

**Gry dynamiczne z pełną (kompletną) i doskonałą informacją**

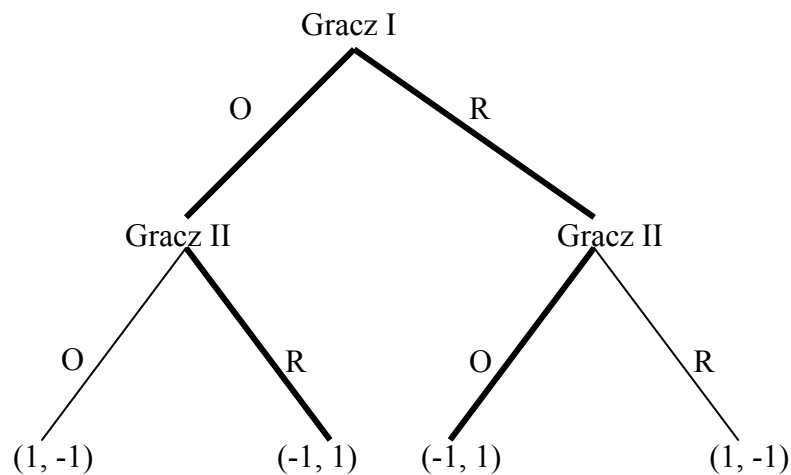
Grą dynamiczną jest każda gra w której gracze wykonują ruchy w pewnej kolejności.

Czy w dowolnej grze dynamicznej lepiej być graczem, który wykonuje pierwszy ruch czy drugi?

Model Stackelberga – lepiej być przywódcą

Gra w kółko i krzyżyk – remis, jeśli obaj gracze są racjonalni

Gra w orła i reszke (sekwencyjna) – lepiej być graczem II



W tej grze zawodnik II wybiera zawsze odwrotną stronę monety, niż zawodnik I.  $\Rightarrow$  Gracz I jest obojętny pomiędzy O i R.  $\Rightarrow$  NE: (O, RO); (R, RO); (p, RO) dla  $0 < p < 1$ , gdzie p oznacza strategię mieszaną wybrania O z prawdopodobieństwem p.

*Każdą grę w postaci rozwiniętej (ekstensywnej) można też przedstawić w postaci macierzowej (normalnej) i na odwrót.*



Mając określone zbiory strategii graczy oraz wypłaty można przejść od postaci ekstensywnej gry do postaci macierzowej i rozwiązać grę poprzez znalezienie NE.

Ad przykład: [Gibbons s.60]

Strategie gracza II: L oraz R

Strategie gracza I: L jeśli gracz II zagra L, L jeśli gracz II zagra R  
 L jeśli gracz II zagra L, R jeśli gracz II zagra R  
 R jeśli gracz II zagra L, L jeśli gracz II zagra R  
 R jeśli gracz II zagra L, R jeśli gracz II zagra R

(te strategie gracza I oznaczamy odpowiednio jako LL, LR, RL, RR)

	L	R
LL	2, 0	2, 0
LR	2, 0	2, 0
RL	1, 1	3, 0
RR	1, 1	0, 2

NE: {LL, L}, {LR, L}

SPNE: {LL, L}

Podgra - jest zbiorem wierzchołków i gałęzi które łącznie spełniają trzy warunki:

1. zaczyna się w *pojedynczym* wierzchołku decyzyjnym
2. zawiera *wszystkie* gałęzie wychodzące z tego wierzchołka
3. jeśli zawiera jakąś część zbioru informacyjnego, to zawiera wszystkie wierzchołki w tym zbiorze



Podgrą gry w postaci ekstensywnej jest dowolne poddrzewo drzewa gry wyjściowej

Gra w postaci ekstensywnej ma kompletną informację, jeśli zbiory informacyjne każdego gracza są jednoelementowe.

Zbiór informacyjny – zbiór wierzchołków, których gracz nie może od siebie odróżnić w momencie podejmowania decyzji.

Informacja pełna – każdy gracz ma informacje o wypłatach wszystkich pozostałych graczy (wypłata graczy w każdym możliwym ruchu jest powszechnie znana)

Informacja doskonała – w każdym posunięciu gry wszystkim graczom znana

jest historia gry z poprzednich posunięć (wszystkie poprzednie ruchy są powszechnie znane zanim nastąpi kolejny ruch)

Doskonała równowaga Nasha w podgrach (SPNE) – taka równowaga Nasha gdy tworzące ją strategie wyznaczają równowagi we wszystkich podgrach tej gry



Jeśli ograniczymy grę do dowolnej podgry, to SPNE jest parą strategii które gracze wybierają w **każdej** podgrze jako NE (trwałość względem podgier SPNE)

**Twierdzenie:**

W każdej skończonej grze z doskonałą i kompletną informacją istnieje SPNE w strategiach czystych.

**Twierdzenie Kuhna (1953):**

Każda gra skończona z kompletną i doskonałą informacją, ale bez posunięć losowych, ma równowagę Nasha w strategiach czystych.

Przykład: Pilot kontra Terrorysta

Na pokładzie samolotu lecącego z X do Y znalazł się terrorysta, który zagroził pilotowi, że eksploduje bombę jeśli pilot nie zawróci samolot do Z.

Gracz I - pilot (Y – planowany lot), Z – terrorysty żądanie)

Gracz II - terrorysta (B – eksplodować bombę, N - nie eksplodować bombę)

1) Ile podgier jest w tej grze?

Trzy podgry. W każdej podgrze posunięcie N stanowi NE.

2) Jakie strategie są dostępne dla graczy?

Pilot jest ograniczony tylko do jednego ruchu w pojedynczym wierzchołku, który składa się z dwóch możliwych posunięć.  $\Rightarrow$  Pilot ma 2 strategie: Z oraz Y

Terrorysta może znaleźć się zarówno w wierzchołku  $\Pi_Z$  jak i  $\Pi_Y \Rightarrow$  Strategią dla niego będzie wyszczególnienie precyzyjnych posunięć jakie terrorysta będzie mógł dokonać w każdym pojedynczym wierzchołku  $\Rightarrow$  Terrorysta ma 4 strategii: (BB) (BN) (NB) (NN)

$\Rightarrow$  *Strategia musi wyszczególniać co gracz będzie mógł zrobić w każdym swoim wierzchołku.*

3) Ile jest NE w tej grze?

	BB	BN	NB	NN
Z	-1, -1	-1, -1	1, 1	1, 1
Y	-1, -1	2, 0	-1, -1	2, 0

NE:  $\{Z, NB\}$ ,  $\{Y, BN\}$ ,  $\{Y, NN\}$ ,

$\Rightarrow$  Wiele NE znacznie ogranicza naszą zdolność do przewidzenia wyniku gry. Z tego powodu stosuje się inną koncepcję (SPNE), która zawęży zbiór możliwych NE.

4) Która NE jest najlepsza?

Wybór  $\{Z, NB\}$  nie jest sensowny:

Jeśli gracz I zmieni wybór na Y  $\Rightarrow$  NB nie jest optymalną strategią gracza II  $\Rightarrow$  gracz I powinien wywnioskować że wybierając Y, gracz II ma bodziec do zmiany swojej strategii na NN  $\Rightarrow$  obaj gracze zyskają na zmianie strategii

Wybór  $\{Y, BN\}$  również nie jest sensowny:

Jeśli gracz I zmieni wybór na Z  $\Rightarrow$  BN nie jest optymalną strategią gracza II  $\Rightarrow$  gracz I powinien wywnioskować że wybierając Z, gracz II ma bodziec do zmiany swojej strategii na NN  $\Rightarrow$  gracz II ma bodziec do zmiany strategii

Jedyna sensowna równowaga w tej grze to  $\{Y, NN\}$ .

NN jest optymalną strategią bez względu na zachowanie gracza I. Natomiast pozostałe strategie gracza II mogą być optymalne tylko pod warunkiem określonego zachowania gracza I.

SPNE:  $\{Y, NN\}$

Podsumowanie: pierwsze dwie strategii nie spełniają kryterium wiarygodności poza zbiorem równowagi. Gdyby np. gracz II uwiarygodnił swoje zachowanie (np. spisując kontrakt), wtedy wszystkie NE spełniały by kryterium wiarygodności.

$\Rightarrow$  W ekstensywnych postaciach gier szukamy takie NE, w których każdy gracz nie może zwiększyć swojej wypłaty poprzez odstępstwo od strategii wybranej w NE.

**Przykład: Stonoga**

Pewien miliarder zaprasza rektorów UW i SGH do swego pałacu i stawia przed nimi walizkę z pieniędzmi. W walizce jest 1 mld zł. Miliarder jednak chce nie tylko wspomóc naukę, ale też zabawić się: da pieniądze tylko jednej uczelni, a o tym której i ile, zadecyduje gra. Najpierw rektor UW otrzyma propozycję przyjęcia 1 zł. Jeśli ją odrzuci, rektor SGH otrzyma propozycję przyjęcia 10 zł. Jeśli i on odrzuci, następną propozycję dostaje rektor UW i dotyczy kwoty 100 zł. W ten sposób po każdym odrzuceniu oferty następna dotyczy dziesięciokrotnie większej sumy, ale jest skierowana do innego gracza. Pierwsze przyjęcie przez któregokolwiek rektora którejkolwiek darowizny kończy grę.

Zapisać grę w postaci ekstensywnej i znaleźć SPNE.